

I) A quoi servent les fonctions usuelles ?**a) Exemples :**

①. Il a actuellement 30 euros d'économies et en ajoute 5 par semaine !

Comment varient ses économies E en fonction du nombre x de semaines ?

$$E(x) = 5x + 30$$

②. On partage équitablement 1 million d'euros entre x personnes !

Combien chacun a-t-il en fonction de x ?

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

③. Son abscisse est égale à 0 mètres et il s'éloigne en accélérant de 1m.s^{-1} par seconde !

Comment varie son abscisse en fonction du nombre t de secondes ?

$$f(t) = t^2.$$

④. Un cube a un côté de x mètres !

Comment varie le volume V du cube en fonction du côté x ?

$$V(x) = x^3.$$

⑤. Un carré d'aire de $x\text{m}^2$! Quelle est la mesure de son côté C en fonction de x ?

$$C(x) = \sqrt{x}.$$

b) Remarques :

Les fonctions permettent de « modéliser » certains phénomènes, de décrire l'évolution de certains d'entre eux dans le temps par exemple. (variations de la température moyenne de la terre, variation de la population d'un pays...).

Il est nécessaire de nos jours, de connaître et de maîtriser certains savoir-faire certains résultats concernant les fonctions usuelles (sens de variation, signe, extremums, ...).

II) Qu'est ce qu'une fonction usuelle ?**Définition 1: (fonction usuelle)**

Une fonction f est dite « usuelle » si elle fait partie de la liste suivante :

_ Fonction **Affine** : $x \mapsto \mathbf{ax + b}$.

_ Fonction **Carrée** : $x \mapsto \mathbf{x^2}$.

_ Fonction **Inverse** : $x \mapsto \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$.

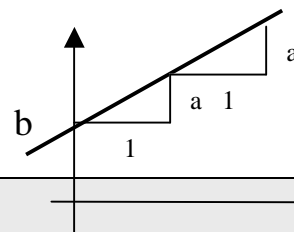
_ Fonction **Cube** : $x \mapsto \mathbf{x^3}$.

_ Fonction **Racine carrée** : $x \mapsto \sqrt{\mathbf{x}}$.

III) Propriétés des fonctions usuelles ?

A) FONCTIONS AFFINES

■ Propriété 1 : (GRAPHIQUE d'une fonction AFFINE)



- 1) Soit f une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ pour $x \in \mathbb{R}$.
La **courbe représentative de la fonction affine** f est une **droite d'équation $y = ax + b$** . (a est le **coefficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine**)
- 2) Réciproquement : Si la courbe d'une fonction est une **droite** alors la fonction est **affine**.
- 3) Une fonction est **linéaire** si et seulement si sa courbe est une **droite passant par l'origine**.
- 4) Une fonction est **constante** si et seulement si sa courbe est une **droite parallèle à l'axe (ox)**.

■ Propriété 2 : (PROPORTIONNALITE des ACCROISSEMENTS)

Une fonction est affine si et seulement si $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \text{constante} = a$ quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 ($x_1 \neq x_2$)
Autrement dit : l'accroissement $f(x_2) - f(x_1)$ de la fonction entre x_1 et x_2 est proportionnel à l'accroissement de la variable $x_2 - x_1$ entre x_1 et x_2 . Le coefficient de proportionnalité est : a

Application : (pour trouver la formule de la fonction f connaissant 2 valeurs)

On cherche la fonction affine f telle que $f(2) = 10$ et $f(4) = 16$.

f est de la forme $f(x) = ax + b$ et on a : $a = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 10}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$.

Donc $f(x) = 3x + b$. de plus $f(2) = 10$ donc $3 \times 2 + b = 10$ donc $b = 10 - 6 = 4$
finalement $f(x) = 3x + 4$.

■ Propriété 3 : (SENS DE VARIATION d'une FONCTION AFFINE)

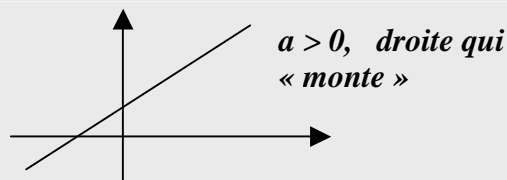
Soit f une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On distingue les **3 cas** suivants selon la **valeur du coefficient directeur « a »**

•Cas où $a > 0$:

f est **croissante stricte** sur \mathbb{R} équivaut à le coefficient directeur « a » est positif strict

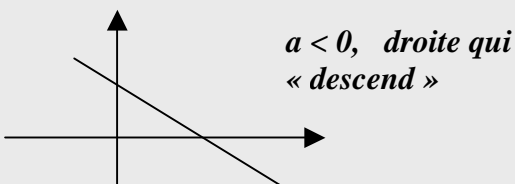
Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		



•Cas où $a < 0$:

f est **décroissante stricte** sur \mathbb{R} équivaut à le coefficient directeur « a » est négatif strict

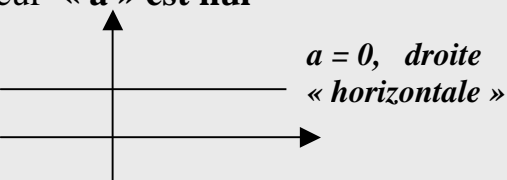
Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		



•Cas où $a = 0$:

f est **constante** sur \mathbb{R} équivaut à le coefficient directeur « a » est nul

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		



- Exemples :**
- ① Soit f telle que $f(x) = 3x - 15$ pour $x \in \mathbb{R}$
 $a = 3$ donc $a > 0$ donc f est strictement croissante.
 - ② Soit f telle que $f(x) = -15x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$
 $a = -15$ donc $a < 0$ donc f est strictement décroissante.
 - ③ Soit f telle que $f(x) = -3$ pour $x \in \mathbb{R}$
 $a = 0$ donc f est constante.


■ **Propriété 4 :** (SIGNE)

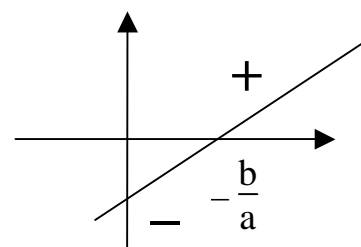
Soit f une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

$f(x) = 0$ donne $ax + b = 0$ donc $x = -\frac{b}{a}$ donc la fonction s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$.

On distingue les 2 cas suivants selon la **valeur du coefficient directeur « a »**
 (si $a = 0$ on a $f(x) = b$ est $f(x)$ est du signe de b pour toute valeur de x)

•Cas où $a > 0$: la fonction **croît** et la **droite coupe l'axe (ox)** au point $x = -\frac{b}{a}$

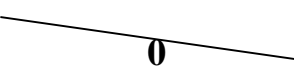
Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Variations de f			
Signe de f	-	0	+

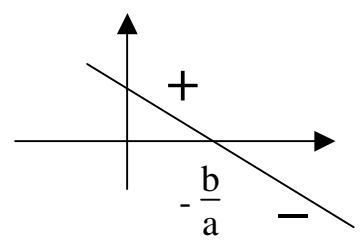


f est positive strict pour $x > -\frac{b}{a}$; f est négative strict pour $x < -\frac{b}{a}$; f est nulle pour $x = -\frac{b}{a}$

•Cas où $a < 0$:

f est **décroissante stricte** sur \mathbb{R} et la **droite coupe l'axe (ox)** au point $x = -\frac{b}{a}$

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Variations de f			
Signe de f	+	0	-



f est positive strict pour $x < -\frac{b}{a}$; f est négative strict pour $x > -\frac{b}{a}$; f est nulle pour $x = -\frac{b}{a}$

On a d'une manière *plus synthétique* :

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de f	Signe de $-a$	0	signe de a

Priorité à droite au signe de « a »

f du signe de « a » pour $x > -\frac{b}{a}$; f est du signe de « -a » pour $x < -\frac{b}{a}$; f est nulle pour $x = -\frac{b}{a}$

Exemple :

Soit f telle que $f(x) = 3x - 15$ pour $x \in \mathbb{R}$

Valeur de x	$-\infty$	5	$+\infty$
Signe de $3x - 15$	-	0	+

$$3x - 15 = 0$$

$$3x = 15$$

$$x = \frac{15}{3} = 5$$

$3x - 15$ est positif pour $x > 5$; $3x - 15$ est négatif pour $x < 5$; $3x - 15$ est nul pour $x = 5$

B) FONCTION CARREE

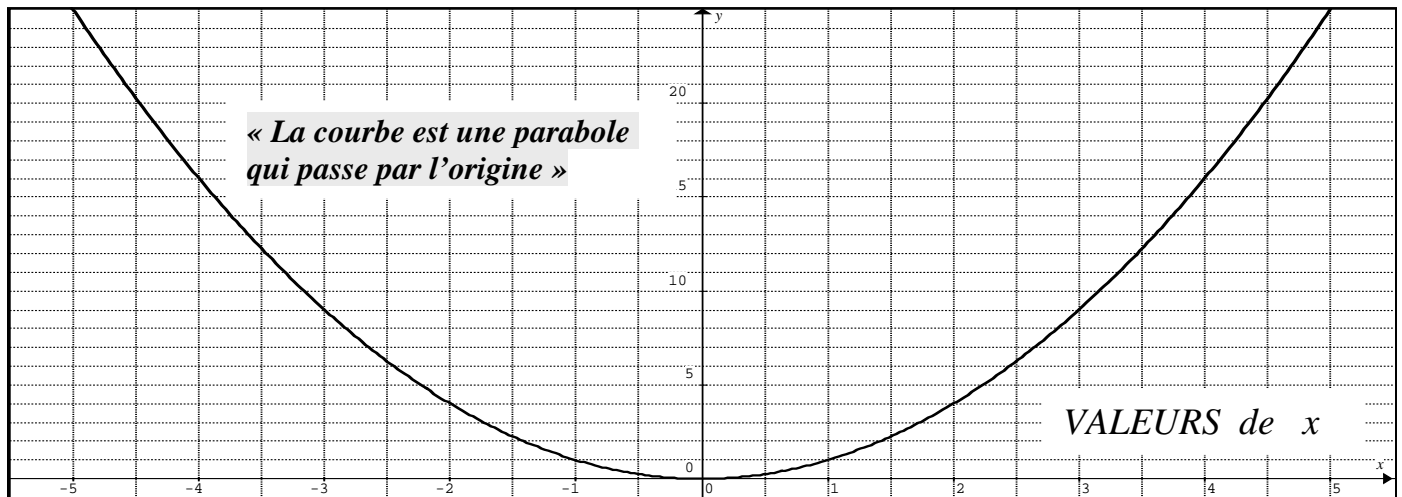
Définition 2 : (fonction carrée)

La **fonction carrée** associe à tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ le carré de ce nombre : x^2 ($x^2 = x \times x$)

On note : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ ou encore : $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Définition 3 : (GRAPHIQUE DE LA FONCTION CARREE).

La courbe représentative de la fonction carrée est une **parabole** d'équation $y = x^2$.



■ Propriété 5 : (SENS DE VARIATION DE LA FONCTION CARREE).

Pour la fonction carrée, on a le tableau de variations suivant :

Valeurs de x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \longmapsto x^2$		\searrow 0 \nearrow	

La fonction carrée est **décroissante** sur $]-\infty ; 0]$.

(plus un nombre négatif est grand et plus son carré est grand)

La fonction carrée est **croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

(plus un nombre positif est grand et plus son carré est grand)

■ Propriété 6 : (SIGNE DE LA FONCTION CARREE).

Valeurs de x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x^2	$+$	0	$+$

Quel que soit le nombre réel $x \in \mathbb{R}$, le carré x^2 de ce nombre est positif ou nul

■ Propriété 7 : (MINIMUM DE LA FONCTION CARREE).

Le **minimum** de la fonction carrée vaut **0** et est atteint pour **$x = 0$** .

Preuve : Résulte immédiatement des variations de la fonction carrée.

Application : $(x - 4)^2 + 10$ est minimum pour $x - 4 = 0$ soit $x = 4$ et le minimum vaut 10.

■ Propriété 8 : (INEGALITE ET FONCTION CAREE).

Quels que soient les nombres réels a et b :

Pour a et b négatifs : Si $a < b$ alors $a^2 > b^2$

Si on élève au carré les membres d'une inégalité entre des nombres négatifs alors on obtient une inégalité de sens inverse.

Pour a et b positifs : si $a < b$ alors $a^2 < b^2$

Si on élève au carré les membres d'une inégalité entre des nombres positifs alors on obtient une inégalité du même sens que la première.

Exemples : ① $-3 < -1$ donc $(-3)^2 > (-1)^2$ donc $9 > 1$. ③ Si $x < -4$ alors $x^2 > 16$
 ② $2 < 5$ donc $2^2 < 5^2$ donc $4 < 25$. ④ Si $x > 3$ alors $x^2 > 9$

■ Propriété 9 : (EQUATION ET FONCTION CARREE).

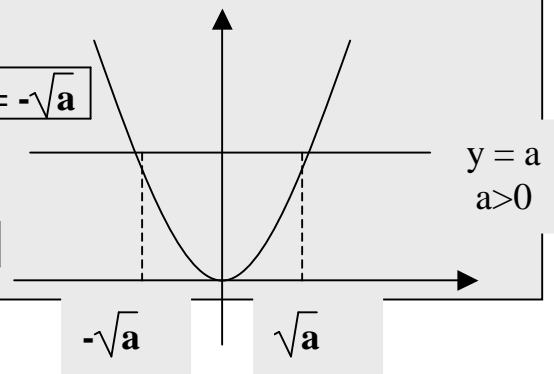
Soit l'équation $x^2 = a$ où a est un nombre réel donné et x un réel cherché.

On distingue trois cas selon les valeurs de « a ».

Pour a positif strict : **Si $x^2 = a$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$**

Pour a nul: **Si $x^2 = 0$ alors $x = 0$**

Pour a négatif strict : **$x^2 = a$ est une inégalité fausse**



Application : ① $x^2 = -7$ n'a aucune solution dans \mathbb{R} et $S = \emptyset$.

② $x^2 = 7$ a deux solutions $x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$ donc $S = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$.

■ Propriété 10 : (INEQUATION ET FONCTION CARREE).

Soient les inéquations $x^2 > a$, $x^2 < a$ où a est un nombre réel donné et x un réel cherché.
 On distingue 3 cas selon les valeurs de « a ».

Pour a positif strict: **Si $x^2 > a$ alors $x < -\sqrt{a}$ ou $x > \sqrt{a}$** c'est à dire $x \in]-\infty, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, +\infty[$.

Si $x^2 < a$ alors $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ c'est à dire $x \in]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[$.

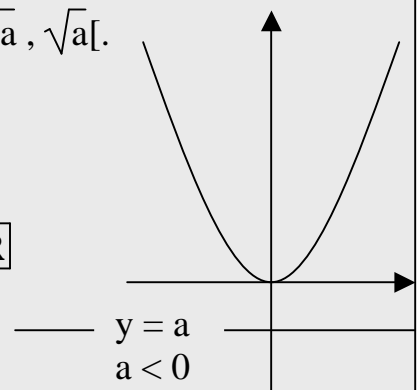
(voir la courbe de la propriété 6 ci dessus pour une illustration)

Pour $a = 0$: **Si $x^2 > 0$ alors $x \in \mathbb{R} - \{0\}$**

$x^2 < 0$ est une inégalité fausse pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$

Pour a négatif strict : **Si $x^2 > a$ alors $x \in \mathbb{R}$** $S = \mathbb{R}$

$x^2 < a$ est une inégalité fausse pour tout $x \in \mathbb{R}$ $S = \emptyset$



Applications : ① $x^2 < -7$ n'a aucune solution dans \mathbb{R} donc $S = \emptyset$.

① $x^2 > -7$ $S = \mathbb{R}$. ② $x^2 < 7$ $S =]-\sqrt{7}, \sqrt{7}[$. ③ $x^2 > 7$ $S =]-\infty, -\sqrt{7}[\cup]\sqrt{7}, +\infty[$.

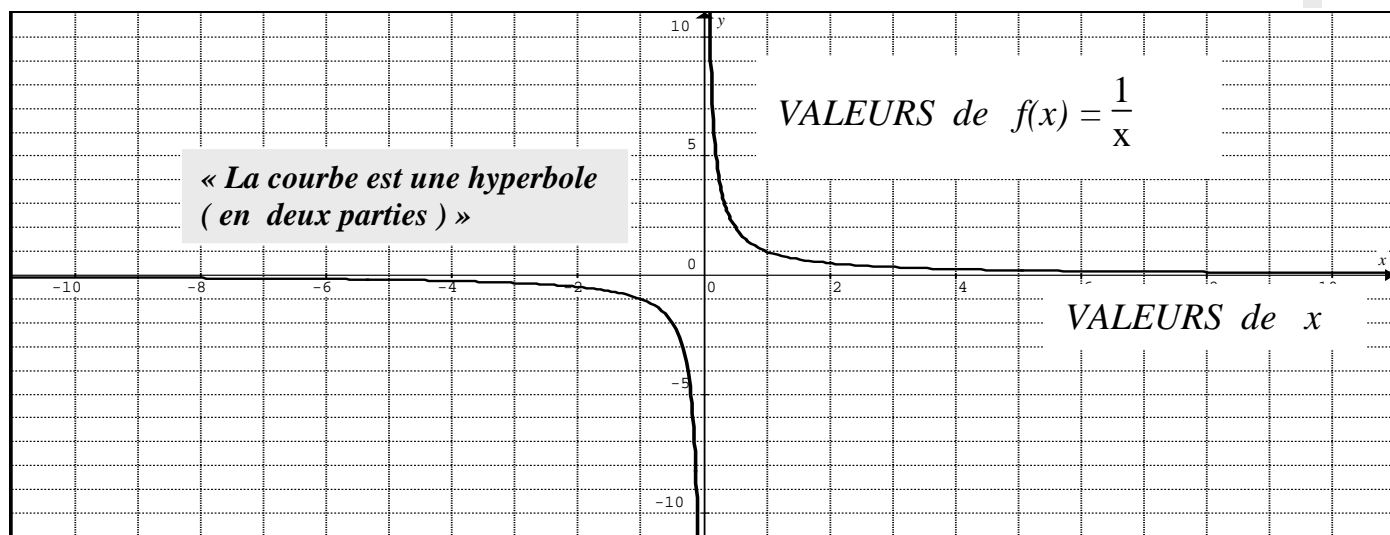
C) FONCTION INVERSE

Définition 4 :

La fonction inverse associe à tous **réel non nul** $x \in \mathbf{R} - \{0\}$, l'inverse $\frac{1}{x}$ de ce nombre.

Définition 5 : GRAPHIQUE DE LA FONCTION INVERSE .

La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole** d'équation $y = \frac{1}{x}$.



■ Propriété 11 : SENS DE VARIATION DE LA FONCTION INVERSE .

Pour la fonction inverse, on a le tableau de variations suivant :

Valeurs de x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto \frac{1}{x}$			

Les « doubles barres » dans le tableau signifient que 0 n'a pas d'image.

La fonction inverse est **décroissante sur $]-\infty ; 0]$** .

(plus un nombre négatif est grand et plus son inverse est petit)

La fonction carrée est **décroissante sur $[0 ; +\infty[$** .

(plus un nombre positif est grand et plus son inverse est petit)

■ Propriété 12 : INEGALITE ET FONCTION INVERSE .

Quels que soient les nombres réels a et b :

Pour a et b négatifs : si $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Si on prend les inverses des membres d'une inégalité entre des nombres négatifs stricts alors on obtient une inégalité de sens inverse.

Pour a et b positifs : si $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Si on prend les inverses des membres d'une inégalité entre des nombres positifs stricts alors on obtient une inégalité de sens inverse.

Exemples : ① $-3 < -1$ donc $\frac{1}{-3} > \frac{1}{-1}$. ② $2 < 5$ donc $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$.

■ Propriété 13 : SIGNE DE LA FONCTION INVERSE.

Valeurs de x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	-		+

Quel que soit le nombre réel non nul $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, l'inverse $\frac{1}{x}$ de ce nombre est du **signe de x**.

Preuve : si x est négatif alors $\frac{1}{x}$ est négatif et si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$. (*signe d'un quotient*)

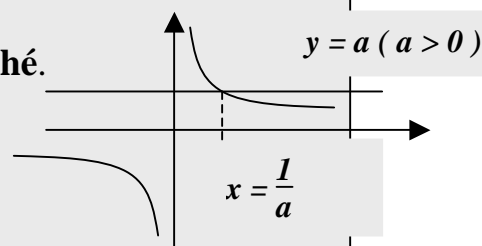
■ Propriété 14 : EQUATION ET FONCTION INVERSE.

Soit l'inéquation $\frac{1}{x} = a$ où **a est donné** et **x un réel cherché**.

On distingue 2 cas selon les valeurs de « a ».

Pour **a ≠ 0** : Si $\frac{1}{x} = a$ alors $x = \frac{1}{a}$

Pour **a = 0** : $\frac{1}{x} = 0$ est une égalité fausse pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$



(la preuve est laissée au lecteur : « produit en croix »)

Application : ① $\frac{1}{x} = 0$: aucune solution, $S = \emptyset$. ② $\frac{1}{x} = 7$ a une solution $x = \frac{1}{7}$; $S = \{ \frac{1}{7} \}$.

■ Propriété 15 : INEQUATION ET FONCTION INVERSE.

Soient les inéquations $\frac{1}{x} > a$, $\frac{1}{x} < a$ où **a est un nombre réel donné** et **x un réel cherché**.

On distingue 3 cas selon les valeurs de « a ».

(Voir la courbe ci dessus pour une illustration)

Pour **a > 0** : si $\frac{1}{x} > a$ alors $0 < x < \frac{1}{a}$ c'est à dire : $x \in]0, \frac{1}{a}[$.

Si $\frac{1}{x} < a$ alors $x < 0$ ou $x > \frac{1}{a}$ c'est à dire : $x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{a}, +\infty[$

Pour **a < 0** : Si $\frac{1}{x} > a$ alors $x < \frac{1}{a}$ ou $x > 0$ c'est à dire $x \in]-\infty, \frac{1}{a}[\cup]0, +\infty[$

Si $\frac{1}{x} < a$ alors $\frac{1}{a} < x < 0$ c'est à dire $x \in]\frac{1}{a}, 0[$

Si **a = 0** : Si $\frac{1}{x} > 0$ alors $x > 0$ $x \in]0; +\infty[$; Si $\frac{1}{x} < 0$ alors $x < 0$ $x \in]-\infty; 0[$.

Application : ① $\frac{1}{x} < 7$ donne $S =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{7}, +\infty[$ ② $\frac{1}{x} > 7$ donne $S =]0; \frac{1}{7}[$.

D) FONCTION CUBE

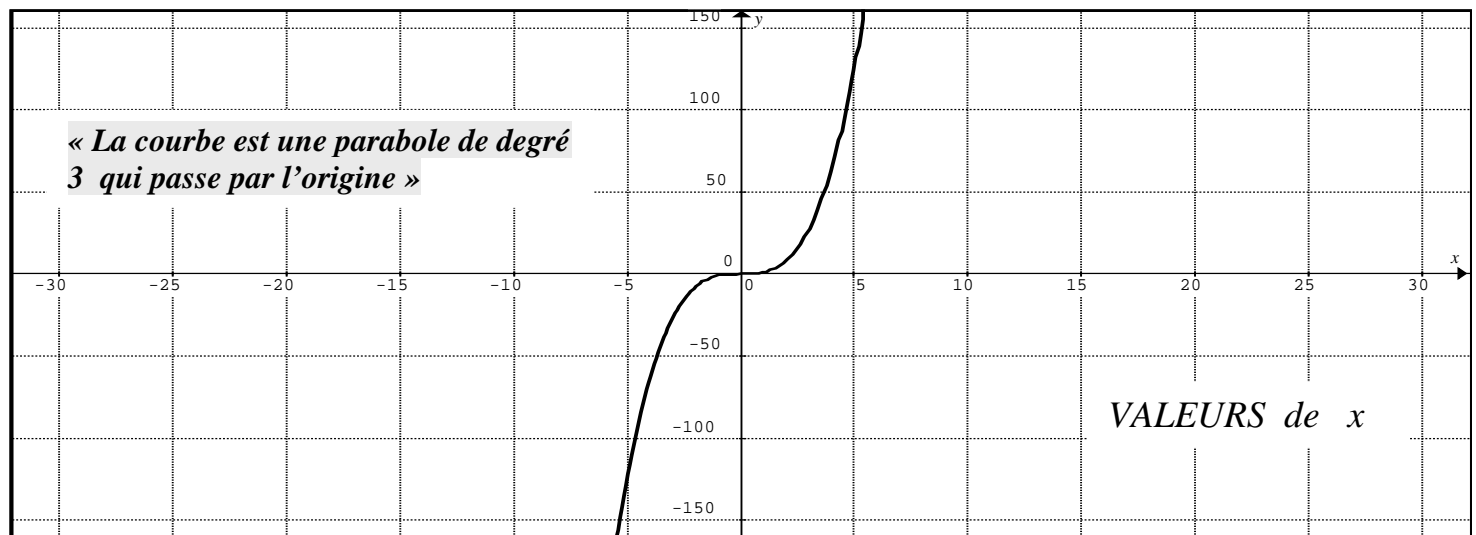
Définition 6 : (fonction cube)

La **fonction cube** associe à tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ le cube de ce nombre : $x^3 = x \times x \times x$.

On note : $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases}$ ou encore : $f(x) = x^3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

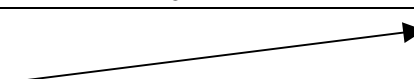
Définition 7 : (GRAPHIQUE DE LA FONCTION CUBE).

La **courbe de la fonction cube** est une **parabole de degré 3** d'équation $y = x^3$.



■ Propriété 16 : (SENS DE VARIATION DE LA FONCTION CUBE).

Pour la fonction cube, on a le tableau de variations suivant :

Valeurs de x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \longmapsto x^3$			

La fonction cube est **croissante sur \mathbb{R}** .

(plus un nombre est grand et plus son cube est grand)

■ Propriété 17 : (SIGNE DE LA FONCTION CUBE).

Valeurs de x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x^3	-	0	+

Quel que soit le nombre réel $x \in \mathbb{R}$, le cube de ce nombre est du signe de x

■ Propriété 18 : (INEGALITE ET FONCTION CUBE).

Quels que soient les nombres réels a et b :

$$a < b \text{ équivaut à } a^3 < b^3$$

Si on élève au cube les membres d'une inégalité alors on obtient une inégalité de même sens.

Exemples $-3 < -1$ donc $(-3)^3 < (-1)^3$ donc $-27 < -1$

■ **Propriété 19 :** (EQUATION ET FONCTION CUBE).

Soit l' équation $x^3 = a$ où **a est un nombre réel donné** et **x un réel cherché**.

La seule et unique solution de cette équation est $x = a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$ (**racine cubique de a**)

Application : $x^3 = -7$ donne $x = \sqrt[3]{-7} \approx -1,91$.

■ **Propriété 20 :** (INEQUATION ET FONCTION CUBE).

Soit l'inéquations $x^3 > a$ où **a est un nombre réel donné** et **x un réel cherché**.

$x^3 > a$ équivaut à $x > \sqrt[3]{a}$ (**idem pour $<$, \leq ou \geq**)

Applications : ① $x^3 < -7$ donne $x < \sqrt[3]{-7}$ d'ou $S =]-\infty ; \sqrt[3]{-7} [$

E) FONCTION RACINE CARREE

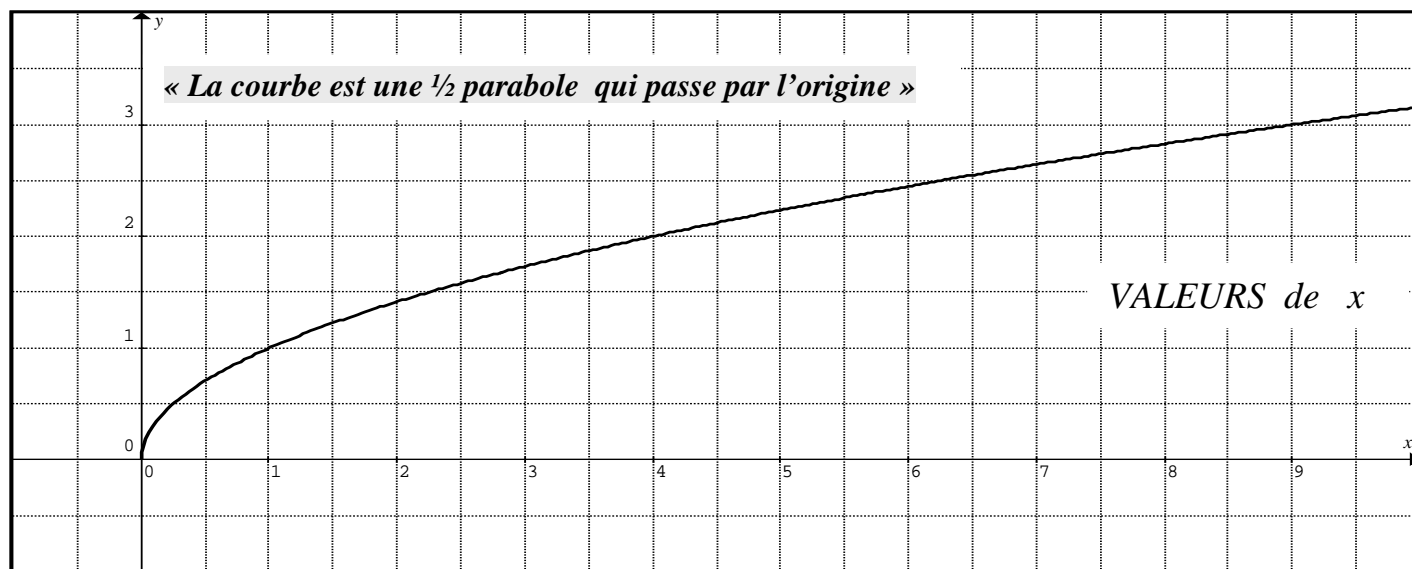
Définition 8 : (fonction racine carrée)

La **fonction racine carrée** associe à tous nombre réel positif $x \in [0 ; +\infty[$ sa racine carrée : \sqrt{x} .


On note : : $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.

Définition 9 : (GRAPHIQUE DE LA RACINE CARREE).

La **courbe de la fonction racine carrée** est une $\frac{1}{2}$ **parabole** d'équation $y = \sqrt{x}$.



■ Propriété 21 : (SENS DE VARIATION).

Valeurs de x	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto \sqrt{x}$		

La fonction racine carrée est **croissante sur** $[0 ; +\infty[$.

(plus un nombre positif est grand et plus sa racine carrée est grande)

■ Propriété 22 : (SIGNE).

Valeurs de x	0	$+\infty$
Signe de \sqrt{x}	+	

Quel que soit le nombre réel $x \in [0 ; +\infty[$, la **racine carrée de ce nombre est positive**

■ Propriété 23 : (INEGALITES).

Quels que soient les nombres réels positifs a et b :

$a < b$ équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Si on prend la racine carrée des **membres d'une inégalité** alors on obtient une inégalité de même sens.

Exemples $1 < 3$ donc $\sqrt{1} < \sqrt{3}$

■ Propriété 24 : (EQUATION).

Soit l'équation $\sqrt{x} = a$ où **a est un nombre réel donné** et **x un réel cherché**.

On distingue 3 cas selon la valeur de a.

Si $a < 0$ Alors l'équation $\sqrt{x} = a$ **n'a aucune solution dans \mathbb{R}** et on note $S = \emptyset$.

Si $a > 0$ Alors l'équation $\sqrt{x} = a$ **a une seule solution dans \mathbb{R} : $x = a^2$** $S = \{a^2\}$.

Si $a = 0$ Alors l'équation $\sqrt{x} = 0$ **a une seule solution dans \mathbb{R} : $x = 0$** $S = \{0\}$.

Application : ① $\sqrt{x} = -7$ n'a aucune solution dans \mathbb{R} .

② $\sqrt{x} = 7$ a une seule solution $x = 7^2 = 49$.

■ Propriété 25 : (INEQUATION).

Soient les inéquations $\sqrt{x} < a$, $\sqrt{x} > a$ où **a est un nombre réel donné** et **x un réel cherché**.

On distingue 3 cas selon les valeurs de « a ». (Voir la courbe ci dessus pour une illustration)

Pour $a > 0$: si $\sqrt{x} > a$ alors $x > a^2$ c'est à dire : $x \in]a^2, +\infty[$.

si $\sqrt{x} < a$ alors $0 \leq x < a^2$ c'est à dire : $x \in [0; a^2[$

Pour $a < 0$ si $\sqrt{x} > a$ alors $x \geq 0$ c'est à dire $x \in [0, +\infty[$

si $\sqrt{x} < a$ alors **pas de solution** c'est à dire $S = \emptyset$

Si $a = 0$ si $\sqrt{x} > 0$ alors $x > 0$ $x \in]0; +\infty[$

si $\sqrt{x} < 0$ alors **pas de solution** c'est à dire $S = \emptyset$

Applications : ① $\sqrt{x} < -7$ donne pas de solution. ② $\sqrt{x} > -7$ donne $x \in [0; +\infty[$

③ $\sqrt{x} < 7$ donne $0 \leq x < 7^2$ et $S = [0; 49[$. ④ $\sqrt{x} > 7$ donne $x > 7^2$ et $S =]49; +\infty[$.

